Aufgabenkatalog Algebra – Sommersemester 2019
Aufgaben zum Thema **Erzeugendensystem, Basis, Dimension**

Dr. Anton Malevich, Leonard Bechtel, Julian Maas

Aufgabe 1 (1)
Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie in den folgenden Fällen eine Basis des Unterraumes $U := \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ mit $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$:

a) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

d) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Tipp: Benutzen Sie den Gauß-Jordan-Algorithmus.

Aufgabe 2 (1)
Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{R}^4$. Berechnen Sie in den folgenden Fällen eine Basis des Unterraumes $U := \langle v_1, v_2, v_3, v_4 \rangle$ mit $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$ und ergänzen diese zu einer Basis von V:

a) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

b) $U = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix} \right\rangle$

c) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

d) $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

Aufgabe 3 (3)
Wir definieren $\mathbb{P}_{n\leq 2} := \{ f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c, \in \mathbb{R} \}$. Zeigen Sie zunächst, dass es sich bei $\mathbb{P}_{n\leq 2}$ um einen dreidimensionalen Unterraum des Vektorraumes $\operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ handelt. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen für $\mathbb{P}_{n\leq 2}$.

Aufgabe 4 (2)
Sei $V := \mathbb{Q}^4$. Bestimmen Sie für die folgenden Unterräume U und W von V jeweils die Dimension und die Dimension des Schnitts $U \cap W$. Bestimmen Sie dann mithilfe der Dimensionsformel die Dimension von $U + W$.

a) $U = \{(s, 2s, 0, 0) : s \in \mathbb{Q}\}$, $W = \{(s, 0, 0, s) : s \in \mathbb{Q}\}$

b) $U = \{(s, 0, 2s, t) : s, t \in \mathbb{Q}\}$, $W = \{(s, 0, 2s, 0) : s \in \mathbb{Q}\}$

c) $U = \{(s, t, 3t, 0) : s, t \in \mathbb{Q}\}$, $W = \{(0, t, 3t, u) : t, u \in \mathbb{Q}\}$

d) $U = \mathbb{Q}^4$, $W = \mathbb{Q}^3 \times \{0\}$

Dimensionsformel: $\dim_{\mathbb{K}}(U + W) = \dim_{\mathbb{K}}(U) + \dim_{\mathbb{K}}(W) - \dim_{\mathbb{K}}(U \cap W)$

Aufgabe 5 (2)
Gegeben seien die folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^5$:

- $U = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 + x_4 = 0 = x_2 + x_5 \}$
- $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_2 + x_3 + x_4 = 0 = x_1 + x_3 + x_5 \}$

Bestimmen Sie die Dimension von U und W. Bestimmen Sie dann eine Basis von $U \cap W$ und berechnen hiermit die Dimension von $U + W$.

Aufgabe 6 (3)
Gegeben seien $V := \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und die Teilmenge

$$U := \{f \in V : f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n,\ a_i \in \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n\}$$

aller reellen Polynomfunktionen. Begründen Sie, wieso U ein Unterraum von V ist und stellen eine Basis von U auf. Bestimmen Sie dann die Dimension von U.

Aufgabe 7 (2)
$V := \mathbb{R}$ ist ein eindimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $B = \{1\}$. Doch was passiert, wenn wir V als $\mathbb{Q}$-Vektorraum auffassen, also nur noch Skalare aus $\mathbb{Q}$ bei der Skalarmultiplikation verwenden dürfen? Bestimmen Sie eine Basis von V als $\mathbb{Q}$-Vektorraum und berechnen dann die Dimension.

Aufgabe 8 (2)
Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V := \mathbb{R}^3$ und die beiden Vektoren $v_1 = (1, 0, 1)$ und $v_2 = (0, 0, 1)$ aus V. Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Das Erzeugnis von v_1 und v_2 ist zweidimensional.

b) Es existiert ein Unterraum U von V, so dass gilt: $v_1, v_2 \in U$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 1$.

c) Es existiert ein Unterraum U von V, so dass gilt: $v_1 \in U, v_2 \notin U$ und $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 3$.